

# 令和5年度広島大学理学部

## 数学科

### 第3年次編入学試験学力検査問題

#### 筆記試験（微積分，線形代数）（5問）

令和4年9月1日

自 9時00分

至 12時00分

#### 答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が計5問ある。総ページは，表紙を入れて6ページである。
- 2 解答用紙は，5枚ある。解答はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。
- 3 下書き用紙は，各受験者に2枚ある。
- 4 受験番号は，すべての解答用紙と下書き用紙の所定の欄に必ず記入すること。
- 5 配付した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1]  $A$  を正定数とし, 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + A} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) 正整数  $n$  に対して  $a_{n+1} > a_n$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $\alpha > \sqrt{\alpha + A}$  を満たす正定数  $\alpha$  が存在することを示せ。
- (3)  $\alpha$  を  $\alpha > \sqrt{\alpha + A}$  を満たす任意の正定数とする。このとき, 正整数  $n$  に対して  $a_n < \alpha$  が成り立つことを示せ。
- (4) 数列  $\{a_n\}$  の極限を求めよ。

[2] 2次正方行列  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) 行列  $A$  の固有値をすべて求めよ。
- (2) (1) で求めた固有値  $a$  に対応する固有ベクトル  $\mathbf{p}$  を一つ与えよ。
- (3) (1) で求めた固有値  $a$ , および (2) で与えた固有ベクトル  $\mathbf{p}$  に対し, 方程式

$$(A - aE)\mathbf{q} = \mathbf{p}$$

を満たすベクトル  $\mathbf{q}$  を一つ与えよ。ただし,  $E$  は2次単位行列とする。

- (4) 2次正則行列  $P$  で  $P^{-1}AP$  が上三角行列になる  $P$  を一つ与えよ。また, そのときの  $P^{-1}AP$  を答えよ。
- (5) 正整数  $n$  に対して,  $A^n$  を求めよ。

[3]  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{x-y}$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x, y)$  の  $x$  に関する偏導関数  $f_x(x, y)$  と  $y$  に関する偏導関数  $f_y(x, y)$  を求めよ。
- (2)  $f_x(x, y) = 0$  かつ  $f_y(x, y) = 0$  となる点をすべて求めよ。
- (3) (2) で求めたそれぞれの点で、 $f(x, y)$  は極値をとるか否か判定し、その理由を述べよ。
- (4)  $f(x, y)$  の最大値および最小値が存在するか否か判定し、その理由を述べよ。また、存在する場合はその値を求めよ。

[4] 3次以下の  $x$  に関する実数係数1変数多項式全体のなす実ベクトル空間を  $V$  とする。写像  $\varphi: V \rightarrow V$  を

$$\varphi(f(x)) = f(x+1) - f(x) \quad (f(x) \in V)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\varphi$  は線形写像であることを示せ。
- (2)  $V$  の基底  $\{x^3, x^2, x, 1\}$  に関する  $\varphi$  の表現行列を求めよ。
- (3)  $g(x) = ax^2 + bx + c \in V$  とする。ただし、 $a, b, c$  は実定数である。このとき、

$$\varphi(f(x)) = g(x)$$

をみたす  $f(x) \in V$  を一つ与えよ。

- (4)  $\varphi$  の核  $\text{Ker } \varphi$  を求めよ。

[5]  $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$  とし,  $I$  上の関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\log(1-x)}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)  $f(x)$  は  $x = 0$  で連続であることを示せ。

(2) べき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$$

の収束半径を求めよ。

(3) 任意の  $x \in I$  に対し,

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

が成立することを示せ。

(4) 広義積分  $\int_0^1 f(x) dx$  が収束することを示せ。

(5) 広義積分  $\int_0^1 f(x) dx$  の値を求めよ。ただし,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

であることは証明なしに用いてもよい。