

## 基礎科目

2021年8月26日 13:30～15:00

### 注意事項

(1) 以下の6枚の用紙が配付されている。

問題用紙 (表紙を含む)      2枚

解答用紙                      3枚

下書用紙                      1枚

(2) 問題は全部で3問あり, [1], [2], [3] の番号で示してある。

(3) 問題ごとに一枚ずつ別々の解答用紙を用いよ。それぞれの解答用紙の左肩に  
問題番号を記入すること。紙面が不足した場合は裏面を用いてよい。

(4) 解答用紙に受験番号を記入せよ。

(5) 試験終了後、解答用紙を提出すること。問題用紙及び下書用紙は持ち帰ること。

試験科目

基礎科目

- [1] 微分方程式に関する次の問いに答えよ。ただし、 $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ,  $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$  である。
- (1) 微分方程式  $ay'' + by' + cy = 0$  の解の定性的ふるまいが、 $b^2$  と  $4ac$  の大小関係により異なることを示せ。ただし、 $a, b, c$  は実定数であり、 $a \neq 0$  とする。
- (2) 微分方程式  $y''' + y = 0$  の一般解を求めよ。ただし、 $y$  は実数とする。
- [2] (1) 対角化可能な  $n$  次正方行列  $A$  について、次の問いに答えよ。 $n$  次の単位行列を  $I$  とする。
- (a)  $A^2 = I$  が成り立つとき、 $A$  の固有値が  $\pm 1$  以外の値をとらないことを証明せよ。
- (b)  $n = 2$  のとき、命題「 $A^2 = I$  であれば  $A = \pm I$  が成り立つ。」を否定する具体的な反例を三つ記せ。ただし、 $A$  の行列要素は全て実数とし、 $A = \bar{A}$  と  $A = -\bar{A}$  が反例であるとき、これらは反例としては同じものとみなす。また、反例の行列は、パラメーターを含まない具体的な形で示せ。
- (2)  $2 \times 2$  行列  $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルの組を全て求めよ。固有ベクトルの規格化は不要とする。
- [3] 直交直線座標系  $O-xyz$  において、 $x, y, z$  軸の正の向きの単位ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  とし、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  とする。ベクトル場  $\mathbf{f} = x^2z\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 4xyz^2\mathbf{k}$  を定義する。次の問いに答えよ。
- (1)  $r \neq 0$  のとき、 $\nabla(\log r)$  を求めよ。 $\log$  は自然対数とする。
- (2) ベクトル場  $\mathbf{f}$  は点  $(c, -1, 1)$  で  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$  を満たす。定数  $c$  を求めよ。
- (3) 六つの平面  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = 3$  で囲まれた立体の表面を  $S$  とする。面積分

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ。 $\mathbf{n}$  は外向きの法線単位ベクトルである。