受験番号	M							

広島大学大学院先進理工系科学研究科

量子物質科学プログラム

博士課程前期 入学試験問題

基 礎 科 目

2020 年 8 月 27 日 9:00〜10:30

注意事項

（1）以下の６枚の用紙が配付されている．

問題用紙（表紙を含む）	２枚
解答用紙	３枚
下書用紙	１枚

（2）問題は全部で３問あり，[1]，[2]，[3] の番号で示してある．

（3）問題ごとに一枚ずつ別々の解答用紙を用いよ．それぞれの解答用紙の左肩に問題番号を記入すること．紙面が不足した場合は裏面を用いてよい．

（4）問題用紙の表紙，解答用紙，下書用紙のすべてに受験番号を記入せよ．

（5）試験終了後，解答用紙を提出すること．問題用紙及び下書用紙は持ち帰ること．

広島大学大学院先進理工系科学研究科（博士課程前期）
量子物質科学プログラム　入学試験問題

2020.8.27

試験科目	基礎科目

[1] (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{9n^2-k^2}$ を求めよ.

(2) 微分方程式 $y''-4y'+4y=xe^x$ の一般解を求めよ.

(3) 媒介変数 t を用いて表された xy 平面上の曲線 $(x,y)=(\sin t,\sin 2t)$ を考える. この曲線によって囲まれた領域の面積 S と, この曲線を x 軸周りに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ.

[2] 3×3 行列

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

の行列式は, 集合 $\{1,2,3\}$ の置換 $p=(p(1),p(2),p(3))$ とその符号 $\sigma(p)$ を用いて,

$$\det A=\sum_{p}\sigma(p)a_{p(1)1}a_{p(2)2}a_{p(3)3} \qquad \cdots ①$$

と定義される.（例えば, 置換 $(2,3,1)$ は1を2に, 2を3に, 3を1に置き換える.）$\sum_p$ は全ての置換 p についての和である. 行列 A の j 列を表す列ベクトル $\mathbf{a}_j=[a_{1j},a_{2j},a_{3j}]^{\mathrm{t}}$ を用いて, 行列 A は, $A=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$ と表せる. ここで, $[\cdots]$ の右肩の記号 t は行と列の転置を表す.

(1) 式①の和に現れる置換 p を全て記せ.

(2) $\det[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]=-\det[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3]$ を示せ.

(3) $\det[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2]$ の値を求めよ. 求め方や理由も記せ.

(4) $\det[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_3]$ を det の定義式①に基づいて計算せよ.

[3] (1) ベクトルの内積と外積に関する次の問いに答えよ. ただし, ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ に対して, $a\equiv|\mathbf{a}|$, $b\equiv|\mathbf{b}|$, $c\equiv|\mathbf{c}|$ とおく.

(i) 二つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積の, a, b, および $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角 θ を用いた定義を記せ. ただし, $0\le\theta\le\pi/2$ とする. 方向の定義も記せ.

(ii) 三つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ を辺とする平行六面体の体積が, $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$ となることを証明せよ.

(2) 半径 a の球体を中心から距離 b（$a>b>0$）だけ離れた平面で分割する. (i) 小さい方の立体の体積 V を求めよ. (ii) $b=a/n$（$n>1$）のとき, V は元の球体の体積の $(1-n^{-1})^4$ 倍になった. n を求めよ.