

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和 2 年 1 月実施
---------------	------	--------------

次の [1] , [2] , [3] の全問に解答せよ .

[1] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ .

(A) 以下の問に答えよ .

(1) \mathbb{R}^3

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専 門 科 目	令 和 2 年 1 月 実 施
---------------	---------	-----------------

[2] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ .

(A) \mathbb{R}^2 上の実数値連続関数 $f(x, y)$ が $\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} f(x, y) = \infty$ を満たすとする . 以下の問に答えよ .

- (1) $\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} f(x, y) = \infty$ となることの定義を述べよ . また , 関数 $f(x, y)$ が最小値をもつことの定義を述べよ .
- (2) $R > 0$ が存在して $|x| + |y| > R$ のとき $f(x, y) > f(0, 0)$ となることを示せ .
- (3) 関数 $f(x, y)$ は \mathbb{R}^2 において最小値をもつことを示せ .

(B) 以下の問に答えよ .

- (1) $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) がマクローリン級数展開可能であることを示し , 総和記号を用いてマクローリン級数展開を与えよ . ただし , 関数 $f(x)$ が \mathbb{R} 上 C^∞ 級であることは証明なしに用いてもよい .
- (2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して不等式

$$0 \leq x^2 - \sin(x^2) \leq \frac{x^6}{6}$$

が成り立つことを示せ .

- (3) \mathbb{R}^2 上の関数 $g(x, y)$ が $(x, y) = (x_0, y_0)$ において全微分可能であることの定義を述べよ .
- (4) \mathbb{R}^2 上の関数 $h(x, y)$ を

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 1 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

により定義するとき , $h(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において全微分可能であることを示せ .

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専 門 科 目	令 和 2 年 1 月 実 施
---------------	---------	-----------------

[3] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ .

(A) a, b を正の実数とする . $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$
$$(x, y) = a|x_1 - y_1| + b|x_2 - y_2|$$

と定める . 以下の問に答えよ .

- (1) d と (x, y) は \mathbb{R}^2 上の距離であることを示せ .
- (2) $A \subset \mathbb{R}^2$ が距離 d に関して開集合であることの定義を述べよ .
- (3) 距離 d に関する開集合と距離 (x, y) に関する開集合は一致することを示せ .

(B) 実数の集合 \mathbb{R} を通常位相で位相空間とみなし , その位相 (開集合系) を \mathcal{O} と表す . 以下の問に答えよ .

- (1) 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して , 部分集合系 $\mathcal{O}_f = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{O}\}$ は集合 \mathbb{R} の位相であることを示せ .
- (2) 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) で定める . このとき (1) で定めた \mathbb{R} 上の位相 \mathcal{O}_f はハウスドルフの分離公理を満たさないことを示せ .
- (3) 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して , (1) で定めた \mathbb{R} の位相 \mathcal{O}_f が \mathbb{R} の通常位相 \mathcal{O} に一致するとき , 次を示せ .
 - (i) f は単射である .
 - (ii) 任意の開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し , $f(I) \subset \mathbb{R}$ は開区間である .