広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数　学　プログラム	専門科目	令和２年１月実施

次の $[1]$，$[2]$，$[3]$ の全問に解答せよ．

[1] **次の** (A), (B) **のすべての問に答えよ．**

(A) **以下の問に答えよ．**

(1) $\mathbb{R}^3$

数 学 プログラム	専門科目	令和２年１月実施

[2] **次の (A), (B) のすべての問に答えよ．**

(A) $\mathbb{R}^2$ **上の実数値連続関数** $f(x,y)$ **が** $\lim_{|x|+|y|\to\infty} f(x,y) = \infty$ **を満たすとする．以下の問に答えよ．**

(1) $\lim_{|x|+|y|\to\infty} f(x,y) = \infty$ **となることの定義を述べよ．また，関数** $f(x,y)$ **が最小値をもつことの定義を述べよ．**

(2) $R > 0$ **が存在して** $|x| + |y| > R$ **のとき** $f(x,y) > f(0,0)$ **となることを示せ．**

(3) **関数** $f(x,y)$ **は** $\mathbb{R}^2$ **において最小値をもつことを示せ．**

(B) **以下の問に答えよ．**

(1) $f(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ **がマクローリン級数展開可能であることを示し，総和記号を用いてマクローリン級数展開を与えよ．ただし，関数** $f(x)$ **が** $\mathbb{R}$ **上** C^∞ **級であることは証明なしに用いてもよい．**

(2) **任意の** $x \in \mathbb{R}$ **に対して不等式**

$$0 \le x^2 - \sin(x^2) \le \frac{x^6}{6}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\mathbb{R}^2$ **上の関数** $g(x,y)$ **が** $(x,y) = (x_0, y_0)$ **において全微分可能であることの定義を述べよ．**

(4) $\mathbb{R}^2$ **上の関数** $h(x,y)$ **を**

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 1 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

により定義するとき， $h(x,y)$ **は** $(x,y) = (0,0)$ **において全微分可能であることを示せ．**

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数　学　プログラム	専門科目	令和２年１月実施

[3] **次の** (A), (B) **のすべての問に答えよ．**

(A) a, b **を正の実数とする．** $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ **に対して**

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$
$$\rho(x, y) = a|x_1 - y_1| + b|x_2 - y_2|$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) d **と** ρ **は** $\mathbb{R}^2$ **上の距離であることを示せ．**

(2) $A \subset \mathbb{R}^2$ **が距離** d **に関して開集合であることの定義を述べよ．**

(3) **距離** d **に関する開集合と距離** ρ **に関する開集合は一致することを示せ．**

(B) **実数の集合** $\mathbb{R}$ **を通常の位相で位相空間とみなし，その位相（開集合系）を** $\mathcal{O}$ **と表す．以下の問に答えよ．**

(1) **関数** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **に対して，部分集合系** $\mathcal{O}_f = \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{O}\}$ **は集合** $\mathbb{R}$ **の位相であることを示せ．**

(2) **関数** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **を** $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ **で定める．このとき** (1) **で定めた** $\mathbb{R}$ **上の位相** $\mathcal{O}_f$ **はハウスドルフの分離公理を満たさないことを示せ．**

(3) **関数** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **に対して，**(1) **で定めた** $\mathbb{R}$ **の位相** $\mathcal{O}_f$ **が** $\mathbb{R}$ **の通常の位相** $\mathcal{O}$ **に一致するとき，次を示せ．**

(i) f **は単射である．**

(ii) **任意の開区間** $I \subset \mathbb{R}$ **に対し，**$f(I) \subset \mathbb{R}$ **は開区間である．**