令和元年度１０月入学及び令和２年度４月入学

[redacted]

物理科学専攻	専門科目

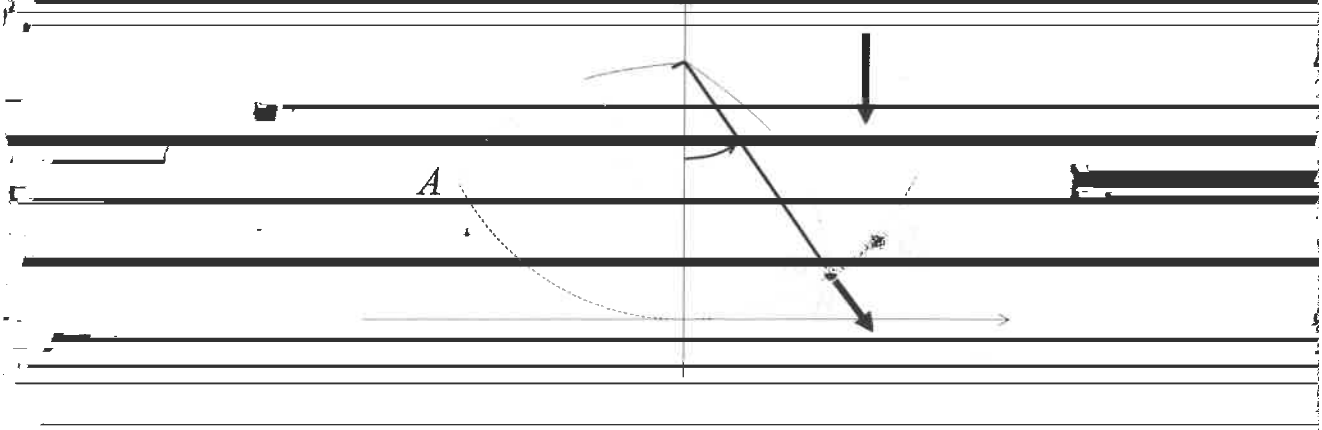
令和元年　８月２２日　　13:30 ～ 16:30

注　意　事　項

1. 以下の用紙が配付されている。
   問題用紙（本表紙を含む。）　６枚
   解答用紙　４枚
   下書き用紙　１枚
2. 問題は[I]～[IV]の４問である。全ての問題に解答せよ。ただし，[I]力学については，問題用紙が２枚あることに注意せよ。
3. 問題ごとにそれぞれの解答用紙に解答せよ。解答方法が特に指定されている場合を除き，最終的な答えだけでなく，解答に至った考え方や途中計算も示せ。紙面が不足した場合は，表面に「裏面に続く」と明記し，裏面に記入せよ。
4. 解答用紙及び下書き用紙の全てに受験番号を記入せよ。
5. 試験終了時には，全ての解答用紙及び下書き用紙を提出せよ。

[I] 力学

振り子の運動に関する以下の設問に答えよ。振り子は図1に示すようなXY平面内で運動す[redacted]



[redacted]

質量mの質点が取り付けられている。棒の質量は無視できるものとする。重力は鉛直下向き（$-Y$方向）に働くものとし，重力加速度はgとする。空気の抵抗や固定点での摩擦は無視できるものとする。

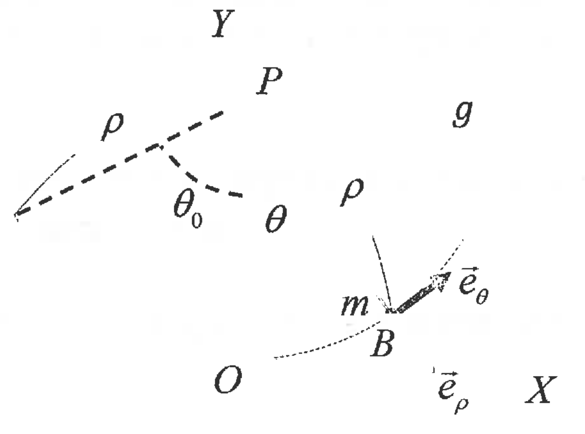


図1

振り子の運動を，点Pを中心とする半径ρの円弧の上の質点の運動として考えてみよう。質

[redacted]

（３）質点に作用する棒の張力をTとして，質点の運動方程式を単位ベクトル$\vec{e}_\rho$ ，$\vec{e}_\theta$を含む形で書け。

（４）設問（３）で得た運動方程式からこの系のエネルギー保存則を表す式を導出せよ。

（５）設問（３）で得た運動方程式から張力Tを傾きθの関数として導出せよ。また，張力 [illegible]

Tが最大となる場合とゼロとなる場合の傾きθをそれぞれ求めよ。

次に，図１の振り子の問題を解析力学の手法で取り扱ってみよう。なお，これまでの設問とは異なり振り子は初期に点Oからある初速度で動き始めたとし，点Pを中心とする振り子の反時計回りの回転角をθとし，一般座標とする。また，質点の位置エネルギーは質点が点Oにあるときをゼロとする。

（６）図１の振り子の運動に関するラグランジアンを，θを用いて書け。

（７）一般座標θに共役な運動量p_θを求めよ　それはどのような物理量に対応しているか簡潔に説明せよ。

（８）図１の振り子の運動を記述するハミルトニアンを書き，これが時間に陽に依存しないことを示せ。このような場合，ハミルトニアンは一定値をとる。これを定数Eとおき，θとp_θの関係式を示せ。

（９）座標と運動量で張られる空間は位相空間（一次元問題の場合には位相平面）と呼ばれる。設問（８）の結果において，一般座標θの絶対値が十分に小さい（$|\theta| \ll 1$）としてθの二次の項まで残し，振り子の運動がθとp_θの関係として位相平面上でどのような図形として描かれるか，簡単な図を用いて説明せよ。なお図は数値的に正確である必要はない。

［II］電磁気学

図１のような，静電容量 C のコンデンサー，抵抗値 R の抵抗，スイッチからなる回路を考える。スイッチが開いた状態でコンデンサーに電荷 Q_0 を与え，時刻 $t=0$ でスイッチを閉じた。

(1)　コンデンサーは一辺 L の正方形の金属板２枚からなる平行平板コンデンサーで，金属板間の距離は d $(d \ll L)$ とする。このとき C を L と d を用いて表せ。ただし，回路は真空中にあるものとし，真空の誘電率 ε_0 を用いること。

(2)　コンデンサーに蓄えられている電荷を時間 t の関数 $Q(t)$ とする。$Q(t)$を，Q_0，t，C，R を用いて表せ。

(3)　スイッチが閉じられる直前にコンデンサーに蓄えられていた静電エネルギーとスイッチを閉じた後に抵抗で生じるジュール熱が等しいことを示せ。

次に，図１の回路に自己インダクタンス L のコイルを加えた図２の回路を考える。スイッ[redacted]

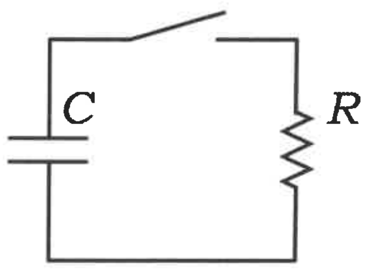


図１

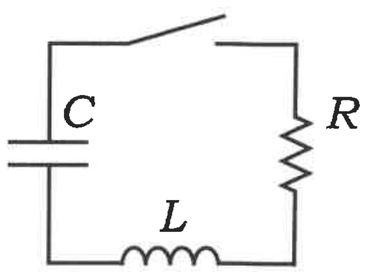


図２

［III］量子力学

次に示す１次元ポテンシャル$V(x)$のもとで運動する質量mの粒子の量子力学的定常状態を考えよう。波動関数$\varphi(x)$は偶関数のみ考えることとする。
以下，$V_0 > 0$, $p > 0$，粒子のエネルギーを$E(0 < E < V_0)$とする。

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x < -p) \\ 0 & (-p < x < p) \\ V_0 & (x > p) \end{cases}$$

（１） ３つの領域におけるシュレディンガー方程式を書け。
（２）各領域の波動関数は以下のような形に書ける。a, b, k_1, k_2に関する関係式を２つ示せ。

$$\varphi(x) = \begin{cases} ae^{k_1 x} & (x < -p) \\ b\cos k_2 x & (-p < x < p) \\ ae^{-k_1 x} & (x > p) \end{cases}$$

（３）設問（２）の結果を整理して，$k_2 \tan k_2 p = k_1$ の関係が成り立つことを示せ。
（４）エネルギー保存則を考えることにより，V_0, k_1, k_2の間に成り立つ関係式を示せ。

次に，$V_0 \to \infty$の極限状態を考えよう。
（５）自然数nを用いて，$k_2 = \frac{\pi}{2p}(2n-1)$, $|b|^2 = \frac{1}{p}$となることを示せ。また，粒子のエネルギー準位を求めよ。
（６）$n = 1$のとき，粒子の位置の平均$\langle x \rangle$と分散$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$を計算せよ。ここで，$\langle A \rangle$は物理量$A$の平均を表す。
（７）このポテンシャルに，十分小さな摂動ポテンシャル$W\cos\frac{\pi}{2p}x$を加えた。$n = 1$のエネルギー準位の変化量を１次の摂動の範囲で計算せよ。

[IV] 熱・統計力学

同種の単原子分子からなるファン・デル・ワールス気体(ファン・デル・ワールスの状態方程式に従う気
[illegible]

$$S(U,V,N)=k_{\mathrm{B}}N\ln\left[\left(\frac{U+(aN^2/V)}{N}\right)^{3/2}\left(\frac{V-bN}{N}\right)C_0\right]+S_0,\qquad C_0=\left(\frac{N_0}{U_0+(aN_0^2/V_0)}\right)^{3/2}\left(\frac{N_0}{V_0-bN_0}\right)$$

で与えられる。k_{B}はボルツマン定数，a，bは十分小さい正の定数であり，$S(U_0, V_0, N_0)=S_0$となるようにSの基準をとっている。粒子数Nを固定し，以下の設問に答えよ。Tは温度，pは圧力，dU，dS，dVはそれぞれU，S，Vの全微分を表す。

(1) Sは示量変数か，示強変数かを答えよ。答えだけでよい。

(2) 熱力学第一法則 $dU=TdS-pdV$ に注意して，$\dfrac{1}{T}=\dfrac{3}{2}\dfrac{k_{\mathrm{B}}N}{U+(aN^2/V)}$，$\dfrac{p}{T}=\dfrac{k_{\mathrm{B}}N}{V-bN}-\dfrac{aN^2/V^2}{T}$ を示せ。

(3) 設問(2)の結果から，ファン・デル・ワールスの状態方程式，

$$\left(p+a\frac{N^2}{V^2}\right)(V-bN)=k_{\mathrm{B}}NT$$

が得られる。ファン・デル・ワールスは，理想気体の状態方程式$pV=k_{\mathrm{B}}NT$のp，Vに，補正項$+aN^2/V^2$，

(4) $-bN$を加えることで，実在気体に対する上式の状態方程式を提案した。$+aN^2/V^2$，$-bN$の補正の意味を簡単に述べよ。

(5) 長さ，質量，時間の次元を[L]，[M]，[T]として(ここでの[T]は時間の次元であって温度ではない)，a，bの次元を書け。答えだけでよい。

熱力学第三法則(ネルンスト-プランクの定理)は，Sの基準のとり方に関連している。熱力学第三法則を簡単に述べよ。

同種の単原子分子N個からなるファン・デル・ワールス気体を，体積可変の透熱容器に閉じ込め，体積をV_1からV_2に等温圧縮する($V_2 < V_1$)。

(6) U，Sを，T，V，Nの関数として表せ。

(7) 等温圧縮によるU，Sの変化ΔU，ΔSを求めよ。

(8) 等温圧縮により，気体に流入した熱量Qと，気体がされた仕事Wを求めよ。

(9) 等温圧縮により，気体は熱量を吸収したか，放出したかを答えよ。