広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻　専門科目（午前）　受験番号　M

令和元年　8月　22日　　　9：00　～　12：00

注　意　事　項

1．以下の用紙が配布されている．

問題用紙（表紙を含む）	4　枚
解答用紙	3　枚
下書き用紙	3　枚

2．問題は全部で　3　問ある．

3．問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい．

4．試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ．

5．試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻	専門科目（午前）	令和元年８月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ．

[1] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 高々 2 次の実係数多項式全体のなす実数 $\mathbb{R}$ 上の線形空間を V とする．ただし多項式の変数は x とする．以下の問に答えよ．

(1) $T = \{1 + x^2, x + x^2, 1 + x + 3x^2\}$ は V の基底をなすことを示せ．

(2) 線形写像 $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ は

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x^2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

を満たすとする．(1) で定めた V の基底 T と $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する φ の表現行列 X を求めよ．

(3) (2) で定めた線形写像 φ の像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積に関する直交補空間 $(\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp}$ を求めよ．

(B) $\mathbb{R}^4$ の 4 個のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と 4×4 行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}_4$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合で表せ．

(3) A のすべての固有値と，対応する固有空間の基底を一組ずつ求めよ．

(4) A のジョルダン標準形 J と，$P^{-1}AP = J$ となる正則行列 P を求めよ．

[redacted]

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻　専門科目（午前）　　令和元年８月実施

[2] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) 正の実数 R に対し，$A_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < R^2,\ x > 0,\ y > 0\}$ とおく．A_R を極座標を用いて表示せよ．

(2) 次の値を求めよ．

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{A_R} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

(B) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2y - 2y^2 + y$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ となる点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

(2) $f(x,y)$ のすべての極値を求めよ．

(C) 以下の問に答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^{k+1}}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示し，その和を求めよ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{k+1}}$ は任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して収束することを示せ．

(3) (2) の級数が区間 $[a,\infty)$ で一様収束するための実数 a の条件を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻	専門科目（午前）	令和元年８月実施

［３］ 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を通常の位相で位相空間とみなし，その位相（開集合系）を $\mathcal{O}$ と表す．次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) X を位相空間とする．写像 $f_1 : X \to \mathbb{R}$ と $f_2 : X \to \mathbb{R}$ に対し，写像 $f : X \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \qquad (x \in X)$$

により定義する．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ の任意の部分集合 U, V に対し，f による $U \cap V$ の逆像 $f^{-1}(U \cap V)$ は

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$$

を満たすことを示せ．

[redacted]の開集合と[redacted]

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	受験番号	M

令和元年　8月　22日　　　　13：30　～　16：30

注　意　事　項

1．以下の用紙が配布されている．

問題用紙（表紙を含む）	9　枚
解答用紙	2　枚
下書き用紙	2　枚

2．問題は全部で　8　問ある．この中から　2　問選んで解答せよ．

3．問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ．紙面が不足した場合は裏面を使用してよい．

4．試験問題の表紙，解答用紙，および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ．

5．試験終了時には，すべての解答用紙および下書き用紙を提出する

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ.

[4] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

[redacted]

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[5] $\mathbb{Q}$ は有理数体，$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{2}})$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 写像 $\varphi : K \to K$ を，$a, b \in \mathbb{Q}$ として $\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ により定義する．φ は K から K への $\mathbb{Q}$ 上の体の同型写像であることを示せ．

(2) $a, b \in \mathbb{Q}$ に対して $\sqrt{a + b\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ となるならば，$\sqrt{a - b\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ となることを示せ．さらにこのとき，$a^2 - 2b^2 = c^2$ となる $c \in \mathbb{Q}$ が存在することを示せ．

(3) L は K の 2 次のガロア拡大であることを示せ．

(4) 拡大次数 $[L : \mathbb{Q}]$ を求めよ．また $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f(x)$ を求めよ．

(5) M を (4) の $f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の分解体とするとき，$\sqrt{7} \in M$ となることを示せ．

(6) $\sqrt{6+2\sqrt{7}} + \sqrt{6-2\sqrt{7}} = 2\sqrt{3+\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ．

(7) M を (5) で定めた体とする．$M/\mathbb{Q}$ の中間体 N で $\mathbb{Q}$ 上 4 次拡大であり $\sqrt{2} \notin N$ となるものを一つみつけよ．また，そのみつけた N について，$\sqrt{3+\sqrt{2}}$ の N 上の最小多項式を求めよ．

[6] $\mathbb{R}^3$ の部分集合 X を

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

で定める．$p = (1, 0, 0) \in X$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) [illegible]

$$\psi : X \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+z^2}}\right)$$

で定める．このとき，$v \in T_p(X) \setminus \{0\}$ で，次の条件 $(\star)$ を満たすものを一つ挙げよ．

$(\star)$　C^∞ 級写像 $c_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ で，$c_v(0) = p,\ c_v'(0) = v,\ (\psi \circ c_v)'(0) = (0, 0)$ となるものが存在する．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[7] D^2 と S^1 はそれぞれ次で定義される円板と円周を表す.

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

また，ソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ を V で表す．以下の問に答えよ.

(1) ソリッドトーラス V と S^1 がホモトピー同値であることを証明し，それを用いる事により，V の基本群と整数係数ホモロジー群を求めよ．ただし，S^1 の基本群と整数係数ホモロジー群は既知としてよい.

(2) ソリッドトーラス V の連結な 3 重被覆 $p : \tilde{V} \to V$ を一つ構成し，被覆写像 p が誘導する基本群の間の準同型写像を求めよ.

(3) 整数 n に対して，連続写像 $\varphi_n : S^1 \to V$ を $\varphi_n(z) = (z^n, z)$ で定める．φ_n が誘導する基本群の間の準同型写像を求めよ.

(4) (2) の被覆 $p : \tilde{V} \to V$ と (3) の連続写像 $\varphi_n : S^1 \to V$ に対して，次の問に答えよ.

連続写像 φ_n が $\tilde{V}$ への持ち上げ $\tilde{\varphi}_n : S^1 \to \tilde{V}$ を持つための n に関する必要十分条件を求めよ．またその条件が満たされているとき，持ち上げ $\tilde{\varphi}_n : S^1 \to \tilde{V}$ を一つ構成せよ.

(5) (3) の連続写像 φ_n を ∂D^2 から V への連続写像とみなす．円板 D^2 とソリッドトーラス V を φ_n により貼り合わせて得られる空間

$$X_n = (D^2 \sqcup V)/(x \sim \varphi_n(x) \quad (x \in \partial D^2))$$

の整数係数ホモロジー群を求めよ.

(6) 向き付け可能な 3 次元閉多様体 M_n で，(5) の位相空間 X_n を部分空間として含むものを一つ与え，その整数係数ホモロジー群を求めよ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[8] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) Ω を $\mathbb{C}$ の領域とし，$z = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) とする．Ω で定義された複素数値関数 $f(z)$
[redacted]
は Ω で正則であるとき，以下の問に答えよ．

(1) $u(x,y)$ が Ω で恒等的に定数に等しいならば，f は Ω で定数関数となることを証明せよ．

(2) a と b は実数の定数とする．$(a - ib)f(z)$ の実部を $u(x,y)$, $v(x,y)$, a, b を用いて表せ．

(3) a と b は $a^2 + b^2 \neq 0$ を満たす実数の定数とする．$au(x,y) \quad bv(x,y)$ が Ω で恒等的に定数に等しいならば，f は Ω で定数関数となることを証明せよ

(B) $z \in \mathbb{C}$ として，積分 $I(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ を考える．ただし，t^{z-1} の分枝は $t = 1$ で 1 となるものをとる．$\mathrm{Re}\, z$ は z の実部とする．また,「$\mathrm{Re}\, z > 0$ のとき，積分 $I(z)$ は収束して，$\mathrm{Re}\, z > 0$ において z の正則関数である」という事実は用いてよい．以下の問に答えよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専　攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[9] μ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする．次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．

(A) $f : [0,1] \to [0,\infty)$ をルベーグ可測関数とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mu(\{x \in [0,1] \mid f(x) > 0\}) > 0$ ならば，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ ならば，$[0,1]$ 上ほとんどいたる所で $f(x) = 0$ となることを示せ．

(B) $E_1, E_2, E_3, \ldots$ は，$\mathbb{R}$ のルベーグ可測な部分集合の列とする．

(1) $\displaystyle\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ を示せ．

(2) $\mu(E_k) \le \frac{1}{k^2}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ならば，$\lim \mu\left(\bigcup^{\infty} E_k\right) = 0$ が成り立つことを示せ．

[redacted]

(C) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ はルベーグ可測関数で，任意の $x \in [0,\infty)$ に対して $|f(x)| \le 1 + x$ を満たすとする．以下の問に答えよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[**10**] 確率変数 $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$ は互いに独立で，

$$\mathrm{P}(X_{j,n} = a_n) = 1 - \mathrm{P}(X_{j,n} = 0) = n^{-1}$$

を満たすとする．ここで，$\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は実数列で，すべての $n = 1, 2, \ldots$ に対し，$a_n \neq 0$ とする．

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{j,n}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) Z_n の平均，分散を n と a_n を用いて表せ．

(2) $X_{1,n}$ の特性関数を n と a_n を用いて表せ．

(3) $n \to \infty$ のとき，$X_{1,n}$ は 0 に確率収束することを示せ．

(4) $a_n = \sqrt{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする．$n \to \infty$ のとき，Z_n は 0 に確率収束することを示せ．

(5) 平均 λ のポアソン分布の特性関数を求めよ．ただし，平均 λ のポアソン分布の確率関数は

$$f(k; \lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

で与えられる．

(6) $a_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする．$n \to \infty$ のとき，Z_n は平均 1 のポアソン分布に分布収束することを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

[11] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．ただし，常微分方程式の解は実数値関数を考えるものとする．

(A) (1) a を実数の定数とする．このとき，常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ay$ の解は $y = Ce^{ax}$（C は実数）に限ることを示せ．

(2) a, b を実数の定数とする．このとき，常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ay + b$ の解をすべて求めよ．

(B) (1) 常に正の値をとる関数 $y(x)$ が常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y - y^4$ を満たすとき，$z = y^{-3}$ で定義される関数 $z(x)$ は常微分方程式 $\dfrac{dz}{dx} = pz + q$ を満たすという．このような実数の定数 p, q が存在することを示し，p, q を求めよ．

(2) 初期値問題 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - y^4 \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ の解を一つ求めよ．

（注意：実際には解は一つだけであるが，解の一意性についての議論は必要ない.）

(C) (1) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = |y|$ の解をすべて求めよ．

(2) $f(y)$ は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数であり，$u(x)$ は区間 I 上の常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ の解であり，かつ I 上の定数関数ではないとする．このとき，次の (i), (ii) のいずれか一方が成立することを示せ．

(i) u は I 上で狭義単調増加である．

(ii) u は I 上で狭義単調減少である．